

《國立政治大學哲學學報》 第三十五期 (2016 年 1 月) 頁 111-150

©國立政治大學哲學系

牟宗三先生《邏輯典範》 對於羅素的批評

劉盈成

國立清華大學中文研究所博士生

地址：30013 新竹市光復路二段 101 號

E-mail: dokkyrote2003@hotmail.com

摘要

本文反省牟宗三《邏輯典範》對於羅素的批評。首先，概述羅素如何藉由集合論而還原數學，並說明「存在公理」何以為羅素學說的公認致命傷。接著，回顧數學哲學的「唯實論」(realism) 與「唯名論」(nominalism) 二大傳統，以見羅素的特性與定位。最後，說明牟氏如何以「純理之自己展現」來看待邏輯與數學，並提出筆者的反思。牟氏觀點未必為羅素所能接受，但我們的結論仍肯定，《邏輯典範》對於牟氏思想的發展具有一拓荒與轉折的意義。

關鍵詞：牟宗三、羅素、邏輯典範、數學、理性主義

投稿日期：2015. 06. 30；接受刊登日期：2015. 11. 16

責任校對：劉鎰銘、劉又仁

牟宗三先生《邏輯典範》 對於羅素的批評

壹、前言

《邏輯典範》一書(以下簡稱《典範》)為牟宗三先生(1909-1995)的早期著作之一,¹不常為學者所注意。依照蔡仁厚先生所撰《牟宗三先生學思年譜》,此書作於1939-40之間(當時牟氏31-32歲),1941年9月由香港商務印書館出版。²《典範》的撰作用心與主旨,牟氏在《五十自述》裡有一番描述。當時許多人出於唯物辯證法的立場而攻擊形式邏輯,牟氏有感於其攻擊之淺薄,故深入羅素(Bertrand Russell, 1872-1970)與懷德海(Alfred North Whitehead, 1861-1947)合著的《數學原理》(*Principia Mathematica*, 共三冊,1910-1913)以求掌握邏輯的真相。³羅素的邏輯主義(logicism)數學哲學,運用

¹ 牟宗三,《邏輯典範》,收入氏著,《牟宗三先生全集》十一冊(台北:聯經出版社,2003)。

² 蔡仁厚,《牟宗三先生學思年譜》,收入牟宗三,《牟宗三先生全集》三十二冊,頁8-10。

³ *Principia Mathematica*的中文書名,《典範》譯為《算理》,而《五十自述》則譯為《數學原理》。這不只是同一著作的譯名改變,還不利於中文讀者識別羅素的不同著作。在*Principia Mathematica*之前,羅素著有*The Principles of Mathematics*(1903),此書名若中譯為《數學原理》似無不可,卻容易被誤以為後來的*Principia Mathematica*。二書皆為羅素的重要著作,為了區別,本文以《數學原理》指較早的*The Principles of Mathematics*;至於較晚的*Principia Mathematica*,則取《典範》之譯名而稱為《算理》,不從《五十自述》。

了「類論」(theory of class, 現在多稱為「集合論」)⁴來構造一邏輯體系,以定義數學概念及其演繹,而牟氏認為主要疑點有二:

- (一)關於何謂邏輯的「函蘊」(implication)。
- (二)羅素的邏輯體系不得不假定幾條「存在公理」:即還原公理(axiom of reducibility)、無窮公理(axiom of infinity)、相乘公理(multiplicative axiom)等。三者分別假定了某些事物的存在,故通稱為「存在公理」(existence theorems)。⁵

關於(一),牟氏自言在《典範》中沒有弄清楚,本文也不擬討論。至於(二)則是《典範》的重點批判目標。三條存在公理的弊病在於:羅素使數學還原於邏輯推演,旨在論述數學命題何以具有獨立自足的必然性。然而,其邏輯推演最終仍有待於假定某些事物的存在,則數學豈可謂獨立自足而必然?羅素之論「類」與關係,固然有些個別的問題,其實問題也都根源於存在公理。牟氏批評之後,認為必須「扭轉」羅素的數學哲學,他主張:邏輯乃是純形式的推演系統,不指涉任何事物對象,可見邏輯只是「純理之自己展現」,不是由經驗歸納而來。牟氏主張,由此先驗的觀點來理解邏輯(以及數學),才能確保其獨立自足,以及超越的必然性。⁶

⁴ 羅素指稱「集合」時所用的字是“class”,「集合論」則為“theory of classes”。而現在英美文獻談到集合、集合論,多用“set”,“set theory”來取代,其意涵無異於羅素的舊名。牟氏《典範》將“class”一字直譯為「類」,雖非目前中文學術界所常用,但此譯法既來自羅素本人的用詞,所以本文仍從之。為了理解方便,讀者在《典範》或本文中見「類」一字,皆可視為目前所謂的「集合」,而「類論」即為「集合論」。

⁵ 牟宗三,《典範》第四卷第一分〈無窮公理與相乘公理:項數與關係〉,頁551-608。

⁶ 以上有關《典範》的概述,主要參考牟宗三,《五十自述》(台北:鵝湖出版社,1989),頁63-74。後來蔡仁厚、顏炳罡二位先生,在各自有關牟氏的著作中提到《典範》之處,亦大體採取《五十自述》之說。見蔡仁厚,《牟宗三先生學思年譜》,

這一番扭轉，牟氏在 1949 年所完成的《認識心之批判》（上下冊，1956-57 年出版）裡有更詳盡的發揮。⁷ 該書進一步指出，知性主體（即「認識心」）乃是邏輯、數學之所歸，知性主體因此而可謂具有超越意義的「邏輯的我」。該書又提出「窮智見德」之說，確立了牟氏往後道德哲學的規模：認識心受到感官經驗所限，而且無法提供終極的創造來源。可見不受條件限制且終極的創造來源，必是在認識心以外，而在於超越的道德心。認識心既已全幅窮盡而見其限制，此即道德主體開始朗現之際。⁸ 牟氏試圖拓展康德哲學，以求接上陸王的心學。而《認識心之批判》可說是一個起步，並且總結了牟氏四十歲之前鑽研純粹哲學的成果。⁹

《典範》與《認識心之批判》之作，前後相距大約十年，而以上的概述之所以連貫二書，是爲了勾勒出前者在牟氏思想發展中的意義。因爲單就《典範》本身而言，牟氏的哲學趣向似乎還不甚明朗。事實上《典範》篇幅既大，內容亦嫌龐雜，因此牟氏後來將此書拆分成《理則學》（1955 年出版）及《認識心之批判》二部著作。我們直到《認識心之批判》才比較清楚地看見，十年前《典範》之描述知性的邏輯性格，可以說在某種程度上作了「窮智見德」的前半部，因此算是一預備性的著作。

頁 10，頁 107-116。顏炳罡，《整合與重鑄—當代大儒牟宗三先生思想研究》（台北：臺灣學生書局，1995），頁 53-57。

⁷ 此書之完成與出版年分，見蔡仁厚，《牟宗三先生學思年譜》，頁 23-24。

⁸ 牟宗三，《認識心之批判》（上冊），收入氏著，《牟宗三先生全集》十八冊，1955 年〈序言〉，頁 12-13。

⁹ N. Serina Chan, *The Thought of Mou Zongsan*. (Leiden, Boston: Brill, 2011), pp.13-14. 《認識心之批判》一書固然是牟氏四十歲之前的重要結集，但他並不認為這是一部成熟之作，「至多是前半期粗略之成熟」。見牟宗三，《認識心之批判》（上冊），1987 年〈重印誌言〉，頁 5。

《典範》一書的定位大致如此。由此書通往「窮智見德」，再以後者作為理解牟氏的支點，而接往他對於康德哲學的批判式繼承、對於宋明儒學的重建，以及對於民主科學的看法等重要主題，這是從牟氏後來的思想發展而看待《典範》的角色。不過，《典範》既由消化與批判羅素而入手，則此批判之是否適當，應該是可以獨立檢視的，不待牟氏未來的著作。這一點或許不常為後人所留意，¹⁰ 不過在《典範》出版之前，其實已有學者約略言及，譬如金岳霖先生 (1895-1984) 的〈邏輯典範評審書〉。此文不長，錄之如下：

此書似欠平衡，有非常之不妥處，亦有極其難得之優點。就不妥處說，批評前人，最為困難，稍有不慎，即有以自己之瞭解為前人之意見之病，此書在此點上未能特別審慎，此不妥處一也。為表示堅決起見，態度上難免帶點火氣，此書火氣似乎太重，此不妥處二也。此書雖有極好中心主張，然而在旁徵博引之程序中，不免意雜思分，此不妥處三也。

但不妥處決比不上優點。關於邏輯底哲學，此書有堅決主張；此主張雖未必為前人之所未見及，然而在忙於枝節、舍本求末的今日思想中，作者能重新提出基本問題，實為可貴；此優點一也。作者堅持“思”與“有”底分別；關於此點底討論，主張堅決，思想清楚，習邏輯與哲學者非細心研究不可；此優點二也。就邏輯本身說，作者不泥於傳統學說，亦不以數理邏輯為止為歸，持超然態度，以大觀小，使邏輯性質特別分明；此優點三也。其餘不必一

¹⁰ 《典範》於 1941 年出版之後，終牟氏有生之年都未曾重印，流傳不廣（見牟宗三，〈邏輯典範〉，黃慶明先生所撰〈《邏輯典範》全集本編校說明〉，頁 1），再加上後來《認識心之批判》取而代之，這些或許都是《典範》不受注意的原因。

一提出。直到今日，國內尚無專論邏輯哲學之書，此書為首創。首創之書如此美滿，深為國人慶。本審查人認為此書應得特獎第一。

審查人 金岳霖¹¹

就本文的關注而言，金氏的意見有二點特別值得注意：（一）《典範》批評前人而未能特別審慎之處；（二）堅持「思」與「有」的分別。我們從後一點說起。思與有之別，乃是牟氏論邏輯與數學時的一項主張。一方面，他認為邏輯、數學的本質就是「思」，也就是前文所提的「純理之自己展現」。另一方面，羅素的數學論卻由事物存在的觀點來理解數學，這是不見「思」而見「有」，誤以「有」而論「思」。羅素之所以不得不假定三項「存在公理」，而無法證成數學的獨立自足與必然性，其邏輯式的解釋系統亦終歸失敗，最主要就是因為未能區別思與有。正如金氏所指出的，思與有之別確實是《典範》的重要主張。以「有」而對照「思」，亦呈現了「純理之自己展現」一語所從來的思考背景。¹²

不過金氏亦提醒，《典範》對於前人的批評不夠審慎。《典範》所批評於羅素之處，¹³ 金氏究竟認為在哪些論點上不夠審慎，如今已

¹¹ 此評審意見書過去未曾公布，《清華學報》於 2002 年首次刊出，並附有原件之縮影本。《清華學報》當時主編楊儒賓先生指出：「原件未注明所評者何書，但觀其內容，所評者應是《邏輯典範》一書無疑。」見《清華學報》新三十二卷第一期（新竹：國立清華大學，2002 年 6 月），頁 208-209。又，對照當期《清華學報》頁 208 的金岳霖原件影本，可知頁 209 之釋文有錯別字，以及字句缺漏。筆者以上所錄之釋文，皆依照原件影本而逕行修改，不一一註明。

¹² 牟宗三，《典範》，第一卷第十一章〈思與有〉，頁 137-143。

¹³ 除了羅素之外，《典範》對於前輩學人的批判也及於康德 (Immanuel Kant, 1724-1804)，還有一些年代近於羅素及懷德海的學者，譬如德國的數學家侯爾德 (Otto Hölder, 1859-1937)。牟氏所引用的侯爾德之著作，是鄭太樸的譯本《數理方法

不得其詳。但是由此評語至少可以看出：一方面，這應該是關乎牟氏的批評本身是否適當，無論其觀點後來如何成長並發展為《認識心之批判》（金氏撰寫評審意見之時，也不可能預見《認識心之批判》的觀點）。另一方面，金氏應當也看出，牟氏的批評關乎思與有之別。如上一段所述，思與有之別既是牟氏的主張，也是他用以批判羅素的主要立足點。所以，如果要檢視牟氏對於羅素的批判，則「思與有之別」至少是一條不能忽略的線索。

本文的目的即由此切入，以見牟氏對於羅素的批評。本文第二節將概述羅素如何藉由類論而還原數學，並說明「存在公理」何以為羅素學說的公認致命傷。第三節則回顧數學哲學的「唯實論」(realism) 與「唯名論」(nominalism) 兩大傳統，以見羅素的定位。第四節回到牟氏對於羅素的批評，說明牟氏如何以「純理之自己展現」來看待邏輯與數學，並提出一點反思。

貳、羅素的邏輯主義數學哲學

牟氏《典範》以羅素為主要批判對象，因此，欲見批判是否適當，自然必須先對於羅素有所說明。筆者的說明不能鉅細靡遺，而是以有利於理解牟氏的批判為限。此外，羅素以邏輯來界定數學，所採用的邏輯表記符號頗為複雜，恐怕不為專業領域以外的人（包括筆者自己）所易曉。我們但求闡述羅素的重要觀念，並勾勒他在數學哲學上的特性與定位，此目的未必要透過專技性的邏輯符號與表式而達到。知名

論》(1937)，原著為 Otto Hölder, *Die Mathematische Methode. Logisch Erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik.* (Berlin: Springer, 1924.)

羅素學者 John G. Slater 所著 *Bertrand Russell*，對於羅素作了很簡明扼要的重構與整理，力求以一般文字來陳述羅素之說，儘量少用邏輯符號。這正符合本文的需要，因此下文第二小節「羅素對於數學哲學的發展：類論的介入」，主要參考了他的著作。至於第三小節「羅素邏輯系統中的存在公理」，則參考 John Ongley 與 Rosalind Carey 合著的 *Russell* 一書。為求中文寫作理路的順暢，筆者自然要不時加上自己的理解與說明。若有理解不當之處，當由筆者負責。

一、數學基礎之研究與邏輯的關係

羅素在出版了學士後論文之後（1897 年），開始致力於數學基礎的研究，並相信數學的基礎可以藉由邏輯而建立。¹⁴ 我們需要先略說數學基礎的研究，以及它與邏輯的關係。數學（包括算術及幾何學）一直被視為特別嚴謹的一門學科，數學命題之真總是必然為真，並且命題之間往往有緊密的演繹關係。除此之外，數學的必然性還呈現為一獨立自足的體系，不必涉及外在的經驗世界。譬如「 $5+7=12$ 」、「四邊形有二條對角線」就是必然為真，並且是獨立於經驗世界而為真，不仰賴經驗而成立。數學命題之客觀獨立性究竟由何而來，如何證成之？這是數學基礎的探討重點之一。

另一方面，我們若取自然科學的知識來對照數學，可以更看出後者的特殊之處。（一）自然科學是研究那些占有時間、空間的具體對象，但數學的「對象」似乎並非這些可見可觸之物。然則，數學對象

¹⁴ 他的學士後論文以“*An Essay on the Foundations of Geometry*”之名出版。此作固然也屬於數學基礎的研究領域，但羅素自己對它的評價甚低。見 John G. Slater, *Bertrand Russell* (Bristol: Thoemmes Press, 1994), pp.15-16。

的性質究竟為何，而能建立一種必然為真的知識？這是存有論 (ontology) 的問題。(二) 自然科學往往是觀察那些具體對象，再加以歸納，而獲得概略為真的知識。數學則是從某些為人所共同認定為真的基本設定出發而作演繹推論，前題為真則保證其結論為真，由此而建立的知識亦具有高度的確定性。然而，人究竟如何而認識了數學對象、認識那些基本設定之真，從而建立起高度確定的知識？這是認識論 (epistemology) 的問題。——要說明數學知識的客觀獨立性，必須追究數學對象的存有論、認識論，這些都是數學基礎的探討中無法迴避的主題。

注意到數學知識的客觀獨立，並給予存有論、認識論的說明，是早自古希臘哲人就開始的。直到十九世紀晚期，邏輯才參與了這個老議題。在羅素之前已經有學者主張，數學的基礎可以藉由邏輯而建立。更準確地說，他們相信數學在本質上就是邏輯。這並不是在主張「數學是具有邏輯性的」。數學的演繹推論富有高度的邏輯性，乃是人盡皆知，毋須至十九世紀才受到強調。當時學者所謂「數學在本質上就是邏輯」，乃是意謂數學可以「還原」(reduce) 為邏輯，讓基本的數學概念、推論原理、以及數學命題彼此之間的演繹關係等，都能藉由一套邏輯體系的語言而重述出來。¹⁵ 邏輯體系是推論嚴謹而具有必然性的，而且整個體系內部是首尾一致而自足圓成，這正好解釋了數學知識何以也是如此。將數學還原為邏輯，正是用來說明數學必然性的一套構想，一般稱為「邏輯主義」。

學者們在數學與邏輯之間建立起緊密的聯繫，這種過去所未見的

¹⁵ 有些學者認為，數學知識之中只有算術才能這樣還原。有些人則認為，算術與幾何都可以還原。羅素是後者，不過本文不會提到他對於幾何學的作法。Michele Friend, *Introducing Philosophy of Mathematics* (Stocksfield: Acumen 2007), pp.49-50.

思想發展，可以分成兩面來看。第一，十九世紀以來，哲學與科學都逐漸放棄柏拉圖式的、或理性主義 (rationalism) 式的觀點，轉而重視具體的經驗性，對於數學基礎的探討亦然。譬如，算術與幾何所處理的究竟是什麼對象，過去學者認為那是一種抽象之物，而且抽象之物是明確而客觀地「存在」著的。至於人如何認識它們，學者常見的解釋或者是人藉由「理性直覺」(rational intuition) 的能力來認識；或者，理性對於這些抽象之物可以擁有清晰明確的「先天觀念」(innate idea)，並看出它們在演繹推論之下的必然結論。到了十九世紀晚期，無論關於這些抽象之物如何存在、以及人如何認識它們等問題，學者都已開始嚐試運用更具體的方式，以求步步描摹客觀獨立的數學概念的成立、以及數學命題的演繹。邏輯主義就是這種思想走向的重要成果之一。¹⁶

第二，數學之所以能夠還原為邏輯，亦有賴於十九世紀邏輯學的新發展。長久以來，邏輯學皆以亞里斯多德 (Aristotle) 的三段論法為主。許多直覺上可知為有效 (valid) 的論證，卻無法表述為三段論法的形式。¹⁷ 但是，十九世紀的邏輯學以其新式的符號體系，而清楚呈現了這類論證的結構及有效性。這種系統性的符號邏輯，在當時就用以表述許多重要的數學原理（尤其是算術），使得數學呈現出類似歐幾里德 (Euclid) 《幾何原本》(*Elements*) 的規模，從少數的基本公理

¹⁶ Horsten, Leon, "Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2015 Edition), Edward N. Zalta (ed.), available from <http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/philosophy-mathematics/>。查閱日期：2015年3月1日。

¹⁷ 譬如：馬是動物，所以馬的頭是動物的頭。這是個有效的論證，但是無法以三段論的形式表述出來。見 John G. Slater, *Bertrand Russell*, p.16.

與概念出發，而嚴謹地推演、證明出某些重要命題。¹⁸

二、羅素對於數學哲學的發展：類論的介入

以上，大致描述了數學基礎的重要研究主題，以及它何以在羅素之前就開始藉重於邏輯學的發展。羅素於 1897 年開始投入數學基礎的問題，而當時邏輯學者的成就便為他所繼承。1900 年，羅素認識了義大利數學家皮亞諾 (Giuseppe Peano, 1858-1932)。皮氏於 1890 年藉由一組基本公理、以及未定義的三個基本概念，定義了「數」之系列所由以構成的條件（羅素認為，最好將皮氏理論中的「數」理解為自然數）。¹⁹ 他的五條公理如下：

- (1) 0 是一個數。²⁰
- (2) 任何數的繼數 (successor) 都是一個數。²¹
- (3) 沒有二個數會有同樣的繼數。²²

¹⁸ John Ongley and Rosalind Carey, *Russell* (New York: Bloomsbury Academic, 2013), pp.3-5.

¹⁹ 「數」的範圍極廣，有自然數、正數與負數、分數、有理數與無理數、實數與虛數。羅素之所以將皮氏理論的「數」理解為自然數，大體是因為：（一）十九世紀的數學家已證明，整個古典數學都可以從算術中推導出來。（二）Richard Dedekind 已證明（1872 年），實數系統及其加法、乘法運算能夠以有理數來定義。接著，有理數又能藉由自然數而定義。這意謂著，實數能夠從自然數中推導出來。再進一步論之，如果自然數及其加法、乘法運算也可以由幾個簡單的公理與基本概念來定義，則整個古典數學都可以還原到自然數所由以構成的條件了。皮氏的五條公理與三個未定義概念，就是扮演著這個角色。見 John Ongley and Rosalind Carey, *Russell*, p.4.

²⁰ “0 is a number.” 事實上，皮氏是以 1 作為（自然）數的開始，他的第一條公理是「1 是一個數」。不過，羅素版本的皮氏體系中，數由 0 開始，所以第一條公理是「0 是一個數」。見 John Ongley and Rosalind Carey, *Russell*, p.27.

²¹ “The successor of any number is a number.” 一個數加上 1，就是該數的「繼數」。

(4) 0 並不是任何一數的繼數。²³

(5) 任何質性 (property) 若為 0 所具有，並且為具有此質性的任何一數的繼數所具有，此質性便為全部的數所具有。²⁴

依照公理(2)，1 是 0 的繼數，2 是 1 的繼數，3 是 2 的繼數……，依此類推可以一一定義每個數。那麼，五項公理是否能夠完整納進每一個可能的數呢？基於公理(1)，0 已經是一個數。再加上(2)，任何一個數的繼數也必是數，於是「繼數」這概念可以不斷產生下一個數，而形成一系列的數。而基於公理(3)，任何二個不同的數，它們各自的繼數也必不相同，所以，後續產生的數必不會重複前面任何一數。基於(4)可以推知，在 0 之前沒有任何數，所以不可能遺漏 0 之前的數。至於公理(5)，其所謂「質性」，我們可借用公理(1)與(2)為例而言之。前者承認 0 是一數，而後者指出任何一數的繼數必亦是一數，粗體字的「...是一數」就是一種「質性」。「是一數」若為 0 所具有的質性，且為具此質性的任何一數的繼數所具有，那麼我們可以歸納得知：全部的數都具有「是一數」之質性。公理(5)概括地指出，任何質性(包括「...是一數」在內)若見之於 0，又見於具此質性的任一數之繼數，則我們可以出於歸納而斷言：全部的數都具有此一質性。換言之公理(5)斷言，數學歸納法可以施用於任何這樣的質性。皮氏這幾項條件的規定，確保了所有的數都可以包納進來。²⁵

²² “No two numbers have the same successor.”

²³ “0 is not the successor of any number.”

²⁴ “Any property which belongs to 0, and also to the successor of any number which has the property, belongs to all numbers.”

²⁵ 以上五公理及相關說明，見 John G. Slater, *Bertrand Russell*, p.16-18. 以及 John Ongley and Rosalind Carey, *Russell*, pp.26-27.

上述五項公理之中，用到了「0」、「數」與「繼數」等基本概念，是皮氏並未定義的。依照邏輯主義的看法，數學在本質上乃是邏輯，數學概念可以藉用邏輯來完整分析並定義，且數學真題 (truth) 可以從邏輯真題中演繹出來。前文（註 19）已提到，實數、有理數都已經可以還原至自然數，所以自然數若也能還原至邏輯，就意謂著整個古典數學都可以還原至邏輯。因此在皮亞諾之後，邏輯主義必須先以邏輯方式來定義「0」、「數」與「繼數」等三個基本概念；再依據這些邏輯定義，而將皮氏五項公理轉譯為邏輯的表記方式。最後，藉由邏輯方式來定義加法與乘法，以重構基本的運算。²⁶ 這樣便證實了自然數的算術體系原本就是邏輯。羅素既繼承邏輯主義的傳統，其數學哲學的主要任務亦是如此。²⁷

皮氏未加定義的三個概念中，「數」尤為基本。羅素發現，人之使用自然數，總是應用於一「類」（現在常譯為「集合」，見前文註 4）。譬如，數 2 總是作為一謂語 (predicate)，針對含有兩元素的類，²⁸ 而有所指陳、限定或形容；其所指陳或言述之內容，即該類的元素之數量。具體來說，數 2 作為一謂語，就是在指陳或描述 {X,Y} 這個類，說這個類之中「含有兩個元素」。²⁹ 數 2 謂述或形容了含有

²⁶ 在四則運算中，加法、乘法比起減法、除法更為基本。自然數不帶有正號或負號，所以它們能夠直接操作的就是加法與乘法。減法需要帶有正號或負號的整數，除法需要有理數或分數。而這些數的定義，都需要以自然數為本。見 John G. Slater, *Bertrand Russell*, p.17.

²⁷ 在羅素之前，已有人開始投入這些任務。譬如 Gottlob Frege (1848-1925) 即此中重要人物，他對羅素的影響也很大。

²⁸ 一「類」裡所包含的個體，通稱為“member”，牟氏常譯為「項數」。本文則用採現在通行的譯名，稱為「元素」。

²⁹ 當我們說：「{X,Y} 含有兩個元素」時，{X,Y} 是主語 (subject)，「含有兩個元素」則對於此主語而有所指陳、言述或形容，故稱為謂語。有關「主語」、「謂語」之說明，見 John Ongley and Rosalind Carey, *Russell*, p.2.

兩元素的類之元素數量。同理，數 1 亦指謂或形容了含有單一元素的類，數 0 則用於空無一物的類。此處所謂的「單一元素」、「兩元素」等語，看似預用了尚待定義的 1, 2 等數。其實，羅素以類論的方式來呈列元素，可以避免這項毛病。譬如數 0 是用於不含任何元素的類，此類可寫成 $\{ \}$ ，這並沒有預用尚待定義的數 0。數 1 所針對的類，可寫成 $\{X\}$ ，其所包含的元素是任何的 X ，此外沒有不同於 X 的元素。而數 2 所針對的類，可寫成 $\{X, Y\}$ ，其元素是任何的 X 、任何的 Y ，而 X 與 Y 並非同一之物。這也沒有預用尚待定義的數 1、數 2。³⁰ 概括來看，每一自然數都指陳了一個類所含的元素數量。

羅素以自然數作為指陳一類、形容其元素數量的謂語，其實就是以類論的詞彙來表示：自然數是用來計算某一成群的個別事物之數量，此即人對於自然數的基本使用方式。羅素進一步指出，在計量過程中，一系列的自然數逐一對應於所計的每一個別物，依此「一對一的相應性」(1-to-1 correspondence)，我們遂得出這一群事物的總數量。若以類論的詞彙來表示：如果 X 對於 Y 有一對一的相應，則沒有其它的元素 X' 會對於 Y 有同樣的關係，而 X 也不對於 Y 之外的任何元素 Y' 有同樣的關係。具體言之，一旦我們用了一個自然數去標記類中的某一元素，就不可以再用同一個數去標記相同類中的另一元素，也不能用另一個數來標記已經標記過的一個元素。自然數雖抽象，但是它實際上——標示了具體的個別事物，最後結算出它們的數量。人以自然數來計算事物，其過程正是如此。

接著，如果類 A 、類 B 二者的元素之間有一對一的相應關係，羅素稱為類 A 「似同」(similar to) 於類 B ，二者就是「似同之類」。

³⁰ John G. Slater, *Bertrand Russell*, p.19.

基於雙方元素之間的一對一相應，可知似同的類必有相同的元素數量。這些具有同樣元素數量的眾類，譬如具單個元素的眾多似同之類、具兩個元素的眾多似同之類、具三個元素的眾多似同之類……都可以因為它們的似同性而各自共聚起來。羅素認為，每一個自然數都可以定義為「一類之數」(the number of a class)：一個自然數，謂述或形容著諸多似同之類的元素數量。這諸多的似同之類共聚起來，它們各自的元素數量共為某一個自然數所指陳。所以，此一數便是這一群似同之類的共用謂語，普遍謂述著它們的元素數量。³¹

皮亞諾的五條公理用到了「0」、「數」、「繼數」等未定義概念，而依照上述的說明，「數」之概念在羅素手裡已得到邏輯式的還原與定義，則「0」與「繼數」的定義亦隨之而成。³²人以自然數來計算某一成群的個別事物之數量，羅素由此出發，指出計量過程中以自然數系列而逐一對應每一物，並總計出事物之量。「一對一的相應」

³¹ John G. Slater, *Bertrand Russell*, pp.18-20. 一個自然數的涵意在於作為謂語，而指陳一個類（乃至與此類互相似同的眾類）的元素數量，這個論點如果要進一步深究，牽涉到羅素的「邏輯類型論」(the theory of logical types)。類型論之所以提出，是羅素在 1901 年撰寫《數學原理》時，發現既有的邏輯系統允許一類或謂語指涉自己；亦即，允許一類成為該類本身的一個元素，或允許一謂語形容該謂語自身。這會造成邏輯裡的悖論 (paradox)，妨礙以邏輯來還原數學（這個有名的「羅素悖論」引發了當時數學界的重大危機）。1903 年《數學原理》出版時，羅素只能在書後附錄中提供一粗略的解決。至 1910 年的《算理》，才有了完整而成熟的類型論，為類或謂語建立起高低不同的層級。成熟的類型論主張：一類不可以成為它自身的一個元素（只能將低它本身一層級的類納為元素），一謂語也不可以形容其自身（只能形容低它本身一層級的謂語類型），否則就是無意義的。類型論避免了邏輯的悖論。同時，一個自然數作為謂語，它所指陳的類（之元素數量）也比它自身更低一層級，這確保了邏輯主義免於悖論。詳見 John G. Slater, *Bertrand Russell*, pp.21-23. John Ongley and Rosalind Carey, *Russell*, pp.12-14. Michele Friend, *Introducing Philosophy of Mathematics*, pp.66-69.

³² 數 0 是空類的謂語。任何一數 N 的「繼數」就是 N 加 1，還原成邏輯語言就是：在 N 所指謂其元素數量的各個眾類裡，加進任何元素 X（除此之外不加進別的元素），而且 X 不同於該類原有的任何元素。

又引進了「似同之類」，於是每一個自然數便普遍謂述著某一類似同之類的元素數量。羅素將自然數定義為「一類之數」，一方面描述了自然數如何獲得它們的意涵，另一方面，也為自然數的成立提供了經驗性的證成。他基於人對於自然數的具體使用經驗，以邏輯的方式而還原了 0, 1, 2, 3.....的取意由來，並由此而定義「數」為何物。羅素的邏輯主義比以上所言更為複雜，而且充滿了邏輯學的專用符號。以上所說，但求能夠扼要呈現羅素的基本構想。

三、羅素邏輯系統中的存在公理

羅素《算理》的邏輯體系之中，必須假定還原公理、無窮公理、相乘公理，以避免自然數之「無窮」(infinity) 對於邏輯主義所造成的困難。以下將說明無窮公理、相乘公理二者。

(一) 無窮公理

羅素撰寫《數學原理》時，原以為自己能夠證明宇宙中有無窮數量的事物。自然數是用於計算事物之數量，如果自然數是可以無窮延續的系列，那麼宇宙中的事物理當有無窮多個，否則自然數的無窮延續便沒有意義。然而幾年之後，羅素的《算理》明言自己的系統無法證明事物的無窮。³³ 事實上，「事物有無窮數量之多」不只是邏輯主義所預設的，大部分的數學體系（包括皮亞諾）也都認為有此必要。

³³ 《數學原理》時期，羅素在「邏輯類型論」尚未成熟的情況下，自認為證明了事物有無窮數量之多。數年後，類型論成熟發展，則發現《數學原理》所用的證明違反了類型論，不得不放棄。John Ongley and Rosalind Carey, *Russell*, p.184.

尤其皮氏的第三公理（任何兩個數都沒有相同的繼數），就是預設了宇宙中的事物有無窮量之多而提出的。依此公理，0, 1, 2...都有各不相等的繼數。但是假如事物的數量有限，譬如十個，那麼數 10 的繼數——10 加 1 等於 11，數 11 該如何以邏輯的方式來定義呢？自然數被用於計算事物的數量，以邏輯方式來說，數 11 理當是含有十一個元素的那些類所共用的謂語，它普遍指陳了這些類所含有的元素數量。但是宇宙間只存在有十件事物，則「含有十一項元素」的類將會是空類，裡面沒有任何元素存在。如此一來，數 11 作為一謂語，它有指陳或形容的對象嗎？它還有意義嗎？更進一步說，元素數量為十一、十二、十三.....的類既然都不存在，都是空類，其元素數量都是零，於是數 11, 12, 13.....所謂述的類，其元素數量都是一樣，結果 $11=12=13$ （一繼數等於其所繼之數），亦即 $10+1$ 等於 $11+1$ ， $11+1$ 等於 $12+1$ （10, 11 兩個數的繼數相同），這顯然抵觸了皮氏的第三公理。而五條公理之中若有一條不成立，算術體系便無法完整還原為邏輯了。

為了避免這個結果，為了確保每一個繼數都不等於其所繼之數，以及皮氏第三公理的成立，理論上就必須假定宇宙中的事物數量為無窮多，即使羅素無法證明這個關乎存在的命題。有無窮多的事物，則延續不止的自然數、或新的繼數之產生，才有意義，使得任何一數都有不等於它本身的繼數，並符合「任何兩個自然數，都沒有相同的繼數」。所謂「無窮公理」，就是假定了宇宙中存在有無窮多的事物，羅素的邏輯化算數體系不能沒有這項假定。³⁴

³⁴ 對無窮公理的說明，參考 John Ongley and Rosalind Carey, *Russell*, pp.184-187.

(二) 相乘公理

羅素撰寫《數學原理》時已經假定了相乘公理，不過他事後才發現，於是後來的《算理》便明言此假定，使之成爲一公理。³⁵ 它也牽涉到自然數的無窮性，並且是爲了處理乘法運算而作的假定。

邏輯主義要定義一數學運算時，必須藉由類及其元素，一方面界定這種運算，另一方面亦表示出運算所得之結果。這是以類論的操作來還原算術，也證明了邏輯語彙確實能夠定義此一運算。譬如要定義兩數相加 ($m+n$)，可以假設類 A 有 m 個元素，類 B 有 n 個元素，而「A 聯集 B」的元素數量就是 $m+n$ 的和。³⁶ 同理，要定義兩數相乘 ($m \times n$)，則假設類 A 有 m 個元素，類 B 有 n 個元素，從兩個類的各個元素中，由 A 的一個元素配上 B 的一個元素，依照一次序而逐一組成定序配對 (ordered pairs)。假設類 A: $\{X_1, X_2 \dots X_m\}$ ，類 B: $\{Y_1, Y_2 \dots Y_n\}$ ，兩類的元素依照一次序而相配，所形成的配對就是： $\langle X_1, Y_1 \rangle, \langle X_1, Y_2 \rangle, \dots \langle X_1, Y_n \rangle, \langle X_2, Y_1 \rangle, \langle X_2, Y_2 \rangle, \dots \langle X_2, Y_n \rangle, \dots \langle X_m, Y_1 \rangle, \langle X_m, Y_2 \rangle, \dots \langle X_m, Y_n \rangle$ 。³⁷ 由所有的定序配對而聚成的類，一方面定義了乘法運算；另一方面，此類之中的元素數量（即配對數量），亦表示出 $m \times n$ 的乘積。

「相乘公理」之假定，就是因應乘法定義的需要而產生的。當乘因的數量有限時（譬如 $m \times n$ 只有兩個乘因），類 A 與類 B 的定序

³⁵ John Ongley and Rosalind Carey, *Russell*, p.184.

³⁶ 這也就是說， $m+n$ 被還原爲「A 聯集 B」，而 $m+n$ 所得之數，正指謂了「A 聯集 B」的元素數量。

³⁷ $\langle \rangle$ 之符號，表示裡面的 X、Y 的排列必須按照次序而形成一特定的配對。假設其次序是「 X_m, Y_n 」，就不可有另一不同次序的配對「 Y_n, X_m 」。

配對之總數是明確可知的。然而，如果乘因有無窮多個，我們就不知道邏輯方式能否表示出一個量，使它為相乘之積。亦即，不知如何建立一個類，使其中的元素數量（亦即定序配對的數量）正可以定義此乘積。數學家相信，無窮多乘因的乘積是存在的。為了確保這一點，當我們以邏輯方式來表述這個乘積之數，必須能夠從無窮多的類（也就是無窮多的乘因所各自謂述的對象）之中，各挑選出一個元素，以進行各類之間的逐一配對，終而獲得全部無遺的定序配對。但是困難在於，這個「挑選」本無規則可循，因為這些類之中，每一個都沒有現成的元素次序，可供定序配對之用。挑選既無次序或規則可循，則最後所得的定序配對是否毫無遺漏，而足以準確地定義乘積之數，將不得而知。當乘因的數量有限時（譬如 $m \times n$ ，乘因為二），挑選即使無規則可循，尚不難操作。可是一旦乘因有無窮多，就不能不面對無規則所造成的困難。³⁸ 為了確保挑選過程之可靠，終而確保全部的定序配對可以網羅無遺，使得它們的量足以準確定義乘積之數，所以羅素假定：總是存在有某個辦法，可以從無窮多的每一類之中逐次挑選一元素，終而確保所有的定序配對都已找到而無遺漏。這就是相乘公理。由於它所假定的是挑選辦法的存在，所以又稱「選擇公理」。

相乘公理還有一個重要的表述方式：無窮多的類之中，每一類所包含的元素都可以獲得適當的排序 (well-ordered)。所謂排序，就是各元素都可以標示為第一、第二、第三……。每一個類的元素如果都可以有適當的排序，則在無窮多類之中的元素挑選就有規則可循，因

³⁸ 在某些特定的情況下，無窮多的乘因並不面臨「無挑選規則」的困境。譬如，當這些乘因所指謂的類之中，有一個是空類（亦即，無窮多乘因之中，有一個是 0），那麼我們將挑不出任何一個定序配對。又如，這無窮多的類之中，每個類都只有一個元素（亦即，這無窮多乘因，每個都是 1），則能夠挑選的定序配對就只有一組，即使沒有挑選規則也無妨。見 John Ongley and Rosalind Carey, *Russell*, p.189.

此挑選過程將是可靠的，在方法上足以納進全部的定序配對。因此，假定適當排序的存在，其實就是在假定有一可靠的挑選規則或辦法。是否有可靠的方法而足以納進全部的定序配對（以求準確地定義乘積之數），乃是乘法運算的邏輯還原能否成立的關鍵。³⁹

以上說明了羅素的無窮公理、相乘公理。數的無窮為邏輯主義的還原工作造成了一些難題，為了確立邏輯對於算術的還原，必須假定宇宙中的事物有無窮之多，以及存在有可靠的方法，以保證乘法的邏輯還原足可網羅所有的定序配對。這兩條公理都假定了某些事物的存在。然而，邏輯系統對於任何事物原本都無所指涉，更不假定任何事物的存在。一邏輯系統若需要這兩項存在公理的支持，便失去了邏輯的內在一致性。⁴⁰ 以這樣的邏輯體系來還原算術，亦抵觸了數學之不指涉或仰賴任何事物的存在、以及無條件的必然性。存在公理之假定，遂成了羅素學說的缺陷。

參、羅素數學哲學的定位：唯名論的一支

前一節所言，羅素主張，自然數總是指謂或形容著某一群似同之類各自的元素數量。似同之類有相同的元素數量，所以某一自然數可以作為謂語，普遍指述著這一群似同之類的共同質性：含有 X 個元素。

值得注意的是，「有 X 個元素」這項質性並不歸屬或依附於 (attribute to) 某個「實體」(substance) 而存在。亦即，並沒有一個類

³⁹ 此處對相乘公理的說明，參考 John Ongley and Rosalind Carey, *Russell*, pp.187-192.

⁴⁰ Michele Friend, *Introducing Philosophy of Mathematics*, p.70.

作為實體，來承載「有 X 個元素」這項質性，使得一旦這個類消逝不存，則歸屬於它的質性就無所依附而散失。這也就是說，所謂「類」並不是一個理論上先行的承載者，而可以作為「有 X 個元素」之質性的歸附或依託對象。與其說類是一理論上先行的承載者、或綜合眾質性的統率之體，也許應該反過來看：是先有 X 個元素之積聚湊合，才會產生一具體的類，沒有元素的聚合則不產生。「有 X 個元素」這項質性，乍看似體現「在」一類上，其實毋寧是體現「為」一類。當羅素主張自然數是在指謂「有 X 個元素」，他並不認為先有一具體的類作為統率之體，然後「有 X 個元素」作為此實體所統率的一項質性，從而人又以自然數來指陳此質性（以至於若沒有此類的存在，則「有 X 個元素」將無所依，從而數 X 也失其所指而「無所謂」）。羅素毋寧是認為，先有 X 個元素之積聚，才有類之具體產生，以及數 X 去指謂其元素之量。可以說，一具體的類只是眾緣所聚，類就是「有 X 個元素之積聚湊合」之謂，而不能視為一自有其體、且具有個別性 (individuality) 的存在。

這是有關「類」的存有論 (ontology)，由此回到羅素對於自然數的觀點。自然數固然像是一種概念，但是它的目的在於普遍指謂「具有 X 個元素」的眾多似同之類。嚴格說來，我們不能以為自然數對應到「有 X 個元素」的那些類。因為上一段已指出，一個類只是「有 X 個元素之聚合」之謂，而不是一個自有其體而可以被（自然數）指涉或對應之物。照羅素的看法，並沒有這樣的獨立對象（無論此對象是類或其它東西），可以被自然數所對應。若以為自然數對應著這種獨立對象，則近於「唯實論」(realism) 的立場。羅素則認為，自然數乃是便於普遍指謂眾多似同之類的概念名相，此說為「唯名論」(nominalism) 的一支，站在唯實論的對立面。下文將唯實、唯名之說

各自回溯至古希臘的柏拉圖、亞里斯多德二人，這應當有利於瞭解羅素在數學哲學傳統中的位置。⁴¹

一、關於數學對象的唯實論

數學概念總是明確清晰的，數學命題總是必然為真，而數學命題彼此之間的推演關係也極為嚴謹。譬如數 2、數 3 等概念都是一種「共相」(universal)，可以普遍施之於經驗世界，並且概念內容很明確而不會混淆（譬如 2 不等於 3；2 小於 3）；「 $2+3=5$ 」是必然的真題；從「2 不等於 3」也可以推論出「2 加 1 不等於 3 加 1」，從「2 小於 3」也可以推論出「2 加 1 小於 3 加 1」。數學知識的這類特性，自古希臘時期皆已為哲人所共同認可。不過，要如何理解此特性，則哲人所見各自不同。

數學哲學裡關於數學對象的唯實論，首見於柏拉圖，⁴² 它有二大主張：

- (1) 就存有論而言，數學所處理的是某種真正存在的理念對象(ideal objects)。物質對象佔有空間，是可感知(perceptible)者。而數學的對象則是感官知覺所不能接觸、但可以思維理解(intelligible)者，或謂可思而致之者。這二種對象事物處於不同的世界中。數學對象處在「可理解」的理念世界，而不存在於

⁴¹ 以唯實、唯名之別來定位羅素的數學哲學，參考 David Bostock, *Philosophy of Mathematics: An Introduction* (Malden, MA: Wiley-Blackwell, 2009), p.30, 262.

⁴² 所以有時也稱為「柏拉圖主義」(Platonism)。不過，這個詞可以指柏拉圖本身的想法，也可以指後人依據柏氏立場而發展出來的唯實論主張，需依脈絡而定。以下所概述的柏拉圖論點，主要參考 David Bostock, *Philosophy of Mathematics: An Introduction*, pp.7-14.

感官所及的物質世界。數 2、數 3 也不因為物質世界的（譬如）二頭牛、三個蘋果之生滅而存亡。另一方面，數學對象不出於認知主體的主觀構造，故而不因為認知主體之不存在、不認識而消失或改變。這種立場主張數學對象擁有不容否認的客觀存在，獨立於人與物質世界，故稱為「唯實論」。⁴³ 數學就是針對這些客觀實有的對象，而探討它們之間的種種關係。

- (2) 在認識論上，物質對象是可感知者，人藉由感官知覺而接觸之。但數學對象並非物質，它只能被理解，而不可透過視覺、聽覺等感官經驗來接觸與認識。所以人必須藉由獨立於經驗、非感知認識的方式來掌握它們。數學知識因此屬於「先驗知識」(*a priori knowledge*)。人先驗地認識了（譬如）數 2、數 3 等理念對象，以及（譬如）「2 小於 3」、「 $2+3=5$ 」等對象之間的關係，使得數學命題能夠因為數學對象之獨立，而普遍、必然且不受條件限制。

柏拉圖式的論點頗受許多後世數學家的支持。對於他們而言，數 1、數 2、三角形、圓形等都是準確而清晰的實有對象。他們也經常宣稱「發現」了某個數學真題，彷彿確實有某些真實的對象（以及它們之間的真實關係）等待人去揭露。而且，既然數學對象是客觀實在之物，不是出於人的主觀構造，則數學知識才有了人所共認的客觀獨立性。這項重要的知識特質，正好在有關數學對象的唯實論點之中得

⁴³ 唯實論者彼此之間還是有所不同。譬如，言及數學對象的獨立實在時，究竟是指哪些對象呢？有些唯實論者主張「數」是實在的，有些卻認為幾何學裡的點、線、面才是實在的，有些人則認為「類」是實在的。要爭論某一種對象為實在，必須以此對象而建立一套理論，將整個數學（包括算術與幾何）都還原到這些對象中，讓此對象的語彙與命題足以轉譯原有的數學體系，同時保留原有的真值。目前，數學裡最能勝任的還原理論之一，就是類論。見 Michele Friend, *Introducing Philosophy of Mathematics*, pp.28-29.

到了支持。所以，唯實論既貼近數學家的研究經驗，也符合數學知識的客觀獨立。

但是，柏拉圖在認識論上面臨著難題。數學對象既然不是經驗可感知者，那麼，身處感知世界的人要「如何」認識感知所不可觸及的數學對象？如果恪守柏拉圖的存有主張，則數學對象之如何接觸、掌握，並且人如何而信之有據，必須基於對象的存在型態——亦即「可理解性」來立論。然而，「可理解」究竟是怎樣的一種狀態？我們只知道它不是經驗感知所能觸及，所以只能以「先驗」來描述數學知識，此外一無所知。這終究僅指出數學的認識之「不是」仰賴或訴諸感知，至於此認識「是」人循著什麼方式而進行，以及其認識之所以成立的充分理據，仍難有正面的說明。這就是柏拉圖在數學認識論上的主要難題。⁴⁴

二、關於數學對象的唯名論

以唯名論而反對唯實論，最早可以追溯到亞里斯多德。依照前一小節所述柏拉圖之說，數學命題之所以普遍而必然，是因為它們對應著一個客觀獨立的世界：數學對象自成一個領域，既不出於人的主觀構造而存在，更重要的是，它們不屬於感官知覺所能觸及的物質世界。亞里斯多德並不反對有完美的數學對象，而且它們確實是知識的

⁴⁴ 以幾何學為例，柏拉圖指出其二項特色：（一）它使用可見的圖形，來代表理念世界的幾何圖形。（二）它從「假設」（hypothesis）而進行演繹；人人皆知這些假設明顯為真，不需要經過證明即成立，它們乃是幾何學證明所依據的前題或起點。然而，我們究竟如何而認知這些假設為真，卻不易解釋與證成。那麼，這些假設能算是知識嗎？人果然認識這些假設嗎？由這些假設而進行的幾何演繹，其知識地位可靠嗎？以數學對象為「可理解」而非「可感知」的一套存有論，一直不容易正面說明人對於這些對象的認識問題。

對象。但是這些對象如何存在呢？他認為，它們來自物質世界的具體實例，並不脫離感官知覺所能觸及的領域而存在。所以，他反對有一物質世界以外的世界，使得數學對象客觀獨立地存在於彼。⁴⁵ 柏拉圖的「可感知」與「可理解」二種世界之分，並不為亞氏所接受。亞氏主張只有一個世界，亦即可感知的世界，而數學所處理的就是這個世界內部的事物。

以幾何學為例。幾何學所處理的正四邊形，似乎很不同於物質世界裡的方桌、四邊形的紙張或地面等具體之物。這些具體事物的邊線未必是筆直完美的線，邊線交角也未必是準確的九十度。但是亞氏認為，幾何學只是以一種概括、抽象的方式來處理具體四邊形事物的某些共同性質，這些性質經過理想化，成為幾何性質。而我們為了處理幾何性質，便暫時忽略具體事物的形狀不規則，以及其它許多性質。幾何圖形之為一種數學對象，⁴⁶ 並不是脫離具體事物而獨自存在於另一世界，而是具體事物經過理想化，因此獲得一種抽象的處理。人在

⁴⁵ 亞氏如何看待數學對象的存在，或許讓人直接聯想到他對於柏拉圖「理型論」(theory of form) 的反對。亞氏確實主張，理型並不脫離具體事物而獨立存在。不過另一方面，依照亞氏對於柏拉圖的理解，則數學對象有別於理型，它應該是居於理型與具體可感事物之間的「中介」之物。是故，亞氏對於「理型獨立於可感世界」的反駁，並不直接等於他有關於數學對象的看法。比較保守的說法或許是：數學對象無論直屬於理型世界與否，至少（在亞氏心目中）它們是來自具體可感之物的抽象化、理想化（詳下文）。這使得數學對象有別於具體可感之物，但不能因此而以為它們在存有論上脫離後者，而獨自成為一個世界。見 David Bostock, *Philosophy of Mathematics: An Introduction*, pp.10-11. 亞氏《形上學》第十三冊第二章，反駁了柏拉圖「理型脫離具體事物而獨自存在」之說。詳細的討論，見 David Bostock, "Aristotle's Philosophy of Mathematics", in Christopher Shields ed., *The Oxford Handbook on Aristotle* (Oxford; New York: Oxford University Press, 2012), pp.465-491.

⁴⁶ 這裡所謂「幾何圖形」不是指人所繪製的圖形，因為它終究不具有幾何學所要求的「完美」。幾何學母寧是建立在一種「假設」上：假如這是個完美的圖形，則我們可以推知某某結果對它為真。即使人無法繪製完美的圖形，有關完美圖形的演繹推論仍然成立。

進行幾何運算時，思想中往往「虛設」一完美圖形作為對象。亞氏認為這在知識上是可行且有用的，而這種虛設仍然源出於人所接觸的具體事物。

算術也可以類似看待。算術所處理的對象是數，以及數與數之間的關係。這些都不是具體可感知之物，因此看似脫離了可感世界。然而，算術其實也是在一高度抽象的層次上，處理著可感事物的數量關係。譬如某一空間裡有車輛、農場上有牛羊，這些都是可感事物的群集，而人選擇一個不可分割的最小單位——譬如以車輛、牛羊之個別體 (individuality) 作為最小單位——以計算其數量，最後使用一（自然）數以為標記。所以，一「數」原本即意指人以最小單位來測度可感事物的集總之量。數基於可感事物的群聚而產生，算術所處理者亦不脫離事物而存在，只是算術的思維層次比具體事物更為抽象而已。⁴⁷

亞氏在存有論上反對柏拉圖，也影響了他自己的認識論。亞氏認為，人的數學知識仍然屬於一種經驗知識。數學對象既然並不處在「可理解」的世界，那麼，數學也不該是脫離感知世界、純粹觀照著可理解世界而建立的。數學對象之觸及與認識，以及數學命題如何真而有據，亦不能擺脫人對於具體事物的感知。由此可見，柏拉圖或唯實論有關數學對象的存有地位、認識型態之說，亞氏都不接受。他的立場大致如下：完美的對象確實是數學知識的對象，但是數學對象（幾何圖形、自然數）乃是將具體事物加以概括化、理想化而得到的虛設之名。完美圖形或抽象的數，並不自成一個獨立於可感事物的世界。數學命題之真，也應該視為有關（已經過高度概括抽象的）具體事物之

⁴⁷ 依照亞氏的看法，幾何與算術的基礎，都在人對於可感事物的知覺經驗。然而，即使是基本的幾何與算術，都會牽涉到無窮 (infinity)，這恐怕不是有限的知覺經驗所能解釋的。亞氏自己也思考過這個困難，見 David Bostock, *Philosophy of Mathematics: An Introduction*, pp.23-28.

真，並非針對脫離可感世界的對象而為真。⁴⁸

本文第二節「羅素的邏輯主義數學哲學」曾提到，十九世紀晚期的數學家已經準備將整個古典數學都還原到自然數的運算。另一方面，當時的哲學與科學逐漸放棄了柏拉圖式的、或理性主義式的思路，轉而重視具體的經驗性。於是，有些學者在還原數學時，便試圖從經驗性的觀點來進行，羅素就是採取這個路線。羅素基本上接受了亞里斯多德之說，繼承了關於數學對象的唯名論傳統。另一方面，他希望以這種存有論為基礎，重新說明數學知識之為「先驗」知識，以求在認識論上重新詮釋柏拉圖。⁴⁹

具體來看羅素的邏輯主義，每一個自然數都謂述著諸多「似同之類」的元素數量。這諸多的類有相同的元素數量，故而可以共為某一個自然數所謂述。這一個自然數便是這一群似同之類的共用謂語，普遍指陳著它們的元素數量。羅素以此描述了自然數如何從人的使用經驗中獲得了意涵：自然數之為物，即來自於、也還原至人對於具體事物的計量經驗。這正是有關數學對象的一套存有論。

那麼，這種存有論如何繼承了亞里斯多德？前文概述「唯名論」已提到亞氏認為，人面對具體事物之存在或群集，選擇了最小單位以計算其數量，最後使用一自然數作為標記。一「數」原本即意指人以最小單位來測度可感事物的集總之量，算術亦不脫離事物而存在，只

⁴⁸ 以上對於亞里斯多德的概說，主要參考 David Bostock, *Philosophy of Mathematics: An Introduction*, pp.15-31. 又見 David Bostock, "Empiricism in Philosophy of Mathematics", in A.D. Irvine ed., *Handbook of the Philosophy of Mathematics* (Amsterdam; Boston: North Holland / Elsevier, 2009), pp.157-229.

⁴⁹ 羅素既然在存有論上以亞氏為本，那麼，對於人如何認識數學對象、以及數學知識何以為「先驗」，其論點自然不會完全同於柏拉圖。不過，本文主要目的還是在了解牟宗三對於羅素的批評，因此對於羅素的數學哲學必須有所取捨。本文只著重在展示其數學對象的存有論，至於認識論則不能及。

是算術的思維可以超出具體事物而更為抽象。如果我們將一群具體事物（無論它們是牛羊、或蘋果）抽象化為個體，則它們的群聚適可以（如羅素所作的）視為一類裡的元素，元素數量就表示了此群聚裡有多少個體。進一步論，如果同樣數量的一群牛羊、一堆蘋果都共用了同一個數來表示，這就近於羅素所說的，一自然數正是一群似同之類的共用謂語。羅素只是藉用類論而再進一步抽象化，無視於牛羊與蘋果之不同，只著重在它們相同的個體數量，而主張一數所普遍謂述的乃是個體數量相同的眾多之類。對羅素來說，自然數並不脫離於具體事物而獨自存在於可理解的世界，它只是從具體事物之中加以抽象而得到的虛設，算術也是基於此虛設而概括地處理具體的事物。由此可見，羅素之說大體近於亞氏唯名論的精神。⁵⁰

肆、牟宗三的邏輯與數學觀：純理之自己展現

本節一方面要陳述牟宗三如何看待羅素的「存在公理」之假定，另一方面則觀察他如何試圖扭轉羅素的缺失。

一、牟氏對於「存在公理」的批判

⁵⁰ 羅素之論數學對象屬於「唯名論」，但牟宗三稱之為「實在論」，而《認識心之批判》上冊第二卷第一部第二章第六節之標題，亦稱之為「實在論的數學論」。這裡需要作一些釐清：（一）「唯名論」主張數學對象在存有論上乃是人所虛設的名相概念，而不是真實存在（於理型世界）的數 2、數 3、三角形、圓形。就此而言，數學對象是「唯名」的。（二）虛設的名相概念背後，有真實存在的事物作為基礎。譬如，數 X 的普遍基礎就是「含有 X 個元素」的眾多似同之類，就是那些「有 X 頭牛」、「有 X 個蘋果」、「有 X 條船」的真實事物之積聚湊合。羅素這種看待普遍（數學）概念的觀點，近於休謨 (David Hume, 1711-1776) 的經驗主義 (empiricism)。由於數 X 所普遍意指的乃是真實事物所聚合的個體之量，故牟先生稱之為「實在論」。他所謂的「實在論」並不表示羅素是「唯實論」。

羅素的數學哲學裡，最爲學者所周知的弊病，就是爲了因應自然數之無窮對於邏輯主義所造成的困難，而假定了無窮公理、相乘公理。前者假定了有無窮多的事物存在；後者則假定總是有方法可以保證找齊所有的「定序配對」，使得它們的量足以定義乘積之數。如同一般的羅素研究者，牟宗三正確地指出，這兩條公理引起了另一困難：兩條公理皆對於事物的「存在」有所假定；而邏輯系統原本既不指涉任何事物，也不應當假定任何事物的存在，豈能容許這幾條公理？一邏輯系統如果必須仰賴某些事物的存在才能成立，將失去邏輯的內在自足或一致性。而數學亦不指涉任何事物的存在，其必然性也是無條件的。一旦羅素的邏輯系統訴諸「存在公理」來還原數學，則數學的自足性、必然性與先驗性亦終究無法獲得保證。

牟氏不只反對羅素爲了還原數學而假定存在公理。進一步觀之，他亦反對將數學對象「落實」到具體事物之聚集，也不認爲數學概念對應著可理解世界裡的完美對象（理型）。無論是羅素的唯名論，或柏拉圖的唯實論，都訴諸某種事物（entity）之存在來理解數學對象。或者說，它們都訴諸某種意義下的「事實」（fact），以求建立數學的客觀獨立。而依這種進路來說明數學，正是牟氏所反對的。他認爲，這是在數學基礎的論述中未能區別「思」與「有」。數學當是「思」的，而不是「有」的；它是一門純粹的思維理解之學，其成立並不仰賴事實對象的存在，無論它們能否爲感官經驗所知。所以，訴諸「存在」而說明數學，基本上已是誤思爲有、誤以有而論思，⁵¹ 它們都無法證成數學的客觀、獨立與自足。由此觀之，羅素的缺失原是訴諸事物的存在而論數學，不能就純理純思而還原數學於邏輯；至於存在公理的假定，猶屬餘事。

⁵¹ 牟宗三，《典範》，頁 137-143，頁 636。

牟氏自己主張邏輯與數學乃是「純理之自己展現」，不將數學對象視為任何意義下的「存在」之物。這是為了貫徹思與有的嚴格區分。他認為，必須掌握這一主旨，準於思而論思，才可以扭轉羅素之弊病。見下一小節。

二、以「純理之自己展現」論邏輯與數學

數學的基礎固然在於邏輯、可以還原為邏輯，不過進一步言，邏輯乃是一套純粹的思維法則，它本質上是理性自身的展現。數學源出於邏輯思維的運作（下文第 7 點），而邏輯出自純理之自己展現。由此觀之，數學與邏輯都可以歸諸純理。純粹理性自有一客觀的思維規律或法則，依循自身的法則而作如此如此之思維推演。它的思維運作只依它自己的規律而行，不因為經驗世界而變動，也不因為人對它的認識而有所影響，因此它足以保證數學推論之必然，以及數學知識的獨立客觀。

關於「純理之自己展現」，牟氏之要旨如下：⁵²

- (1) 純理：「純」字取康德之意，意謂不雜有感覺經驗。「理」字稍相當於康德的「理性」，但不包括直覺格式 (scheme) 及理解範疇 (category)。「純理不雜有經驗」，意謂在思想進行之中，理性乃獨立於經驗而自行運作。
- (2) 此純理可稱為「理性自己」(reason itself)，具有獨立客觀的地位。
- (3) 純理不等於是智慧活動、綜合能力。（前者是一客觀的存在，

⁵² 牟宗三，《典範》，頁 616-619。

後者是主觀的表現。主觀由客觀以保證之，客觀由主觀以實現之。) ⁵³

- (4) 純理只從「思」方面顯，從思維進行、智慧活動方面顯現，故保證其純粹性、普遍性，與必然性、超越性。⁵⁴ 純理不能從「有」方面顯，故它不是一種存有論式的原理，也不是物理世界的自然律。
- (5) 純理即是邏輯之理。除了邏輯之理以外，其他皆不得稱為純理。
- (6) 純理的具體表現：以二分原則（指肯定與否定之對偶性）為起點，⁵⁵ 由二分原則引出蘊涵關係，以作推斷的根據。在此具體表現中，序次與異同已藏在內，而純理的進行（或純理的伸展與擴張）根本就是序次的、異同的。
- (7) 純理的序次、異同，就是數學的客觀基礎或邏輯基礎之所在。數學不需假定公理，只需根據純理而運用「位置符」(sign of position)，即數，以求步步前進。算術可以藉由位置符的步步前進來看待，幾何學亦然。⁵⁶
- (8) 純理只表現於純智慧的活動或思想的進行，數學思考就是（客觀地位上的）純理而表現於（主觀地位上的）智慧的一種活動。數學思考有時看似沒有細密的步步分解，而有跳躍性的推論。

⁵³ 參下文(8)。牟宗三，《典範》，頁619。

⁵⁴ 同前註。

⁵⁵ 牟宗三，《典範》第一卷第十二章〈邏輯中之二分法〉，頁145-151。

⁵⁶ 關於(7)，詳細說明可參見《典範》第四卷第二分第三節「序次與法則」，其中(一)「序次之哲學的討論」以及(二)「序次之純理觀」等部分。牟宗三，《典範》，頁634-638。又，《認識心之批判》上冊第二卷第一部第二章第二至第四節，對於上述觀念有更詳細的鋪陳，見牟宗三，《認識心之批判》上冊，頁169-181。

這是因為，智慧活動會依照以往所經驗的共通性而提出概括法則，這可以說是一步綜和。

(9) 數學（指算術）的綜和不同於幾何學、物理學的綜和。侯爾德《數學方法論》指出，前者是「純粹的綜和」，智慧本身依循純理而動作，即可產生綜和性的普遍法則；後者為「假設的綜和」，智慧還需某些公理或經驗成分，始能進行綜和動作。⁵⁷

我們先把牟氏上述幾點統整一番，看出他的一番論證：

第一，(1) 與 (2) 都強調了純理之「純」，亦即其展現與運作只遵守其自身的法則，不以經驗世界的材料為依據，也不因為經驗世界的影響而變動，此所以純理獨立於可感的經驗世界。此外，(3) 則區分純理與人的智慧活動或能力。純理不出於人的主觀建構，即使沒有人的活動或能力，純理仍然依自身的規律而運作。這一點是描述純理對於人的客觀獨立。綜合(1)(2)(3)可知，純理的運作是依己不依它，不依物也不依人。即使經驗世界消滅、認知主體不從事智慧活動，純理自身仍然不變，因此它的運作具有獨立客觀的地位。純理「自己」一詞，正強調了理性具有這樣的獨立性。

第二，據(4)與(5)，純理只展現為「思」，亦即邏輯。牟氏認為邏輯乃是純粹的思維法則，不指涉或對應於經驗世界。所以(4)(5)的重點是，純理乃是一純粹的「思」而不雜於「有」的活動。這是在思與有之間，畫清了純理的定位。

第三，(6)與(7)描述了純理的具體表現。從肯定與否定之對偶性引出了幾項主要的蘊涵關係，即同一律、排中律及矛盾律。純理

⁵⁷ 《認識心之批判》上冊第二卷第一部第二章第一節〈純理開展之步位〉，對此九點有更細密的發揮，見牟宗三，《認識心之批判》上冊，頁163-168。

的具體表現已藏有序次、異同，這也是純理運行所依循的二十大原理，而序次異同即是數學在邏輯上的客觀基礎。依據序次、異同而步步前進，則算術與幾何學皆已在其中。⁵⁸「數」乃是純理展開所逐一呈現的「步位」，將步位予以外在化而記以符號，即是「數」。⁵⁹由此觀之，數學之所以展開的原理、或者數學之所以可能的條件，已齊備於純理本身，可以充分示見於純理的運行。純理運行的二十大原理本身並不就是數學，但是它們確保了數學得以從純理之中開展出來，而能建立數學的純粹與先驗。⁶⁰

綜上所述三點：第一，純理是獨立存在的。第二，純理活動是純粹的思，而不雜於有。第三，純理運行本身已經具備了數學開展所需要的條件。合此三者，可以得到一個結論：數學作為一種純思之學，它所依據的二十大原理，就是純理運行所依據的原理。而純理既然客觀而獨立，由它的二十大原理作為數學既內在又超越的保證，則數學亦因此而客觀獨立。換言之，數學的展現無異於純理自身的展現，此可以證成數學本身亦具有純理自身的獨立客觀性。若就人之一面而言，邏輯思考、數學推論等雖然是認知者的主觀智慧活動，但因為此活動基於客觀的理則而展開，故而在客觀上亦獲得了終極的支持。以上就是

⁵⁸ (7) 或許比較容易引起懷疑：序次與異同，就是數學的客觀基礎或邏輯基礎之所在嗎？數學不需假定公理，只要運用「數」以求步步前進，算術就可以建立了嗎？從事數學哲學的人或許會覺得，除非牟氏能夠以此二十大原理來確實演示 (demonstrate) 整個自然數的算術系統，乃至幾何學，讓算術與幾何的概念、命題都還原為序次與異同，並且保有其原來的真值 (就像羅素《算理》所作的)，否則恐不易取信於人。《認識心之批判》大致建立了這項工作的規模。見牟宗三，《認識心之批判》上冊第二卷第一部第二章 (針對算術)、第三章 (針對幾何)。

⁵⁹ 牟宗三，《認識心之批判》上冊，頁 169。

⁶⁰ 牟氏的 (8) 描述了人在數學思考裡的綜和活動。其 (9) 主張，算術的綜和才是純粹理性的動作，幾何學、物理學的綜和則否。這二點對本文較不重要，可略而不論。

牟氏大致的論證。

觀察牟氏的理論型態可知：（一）前述的柏拉圖唯實論與羅素的唯名論，都試圖找出數學概念所對應的某種存在之物，希望由此特定意義的「事實」來保證數學的普遍與必然性。但是牟氏將數學（與邏輯）的普遍、獨立與必然，完全訴諸「純理之自己展現」來保證。他絕不訴求任何意義下的存在事實（他之描述純理如何展開，也不是在斷言純理的「存在」，而只是說明純粹的「思」或「理解」會如何運作），也不訴求人具有某種心理機制、或約定俗成的思維模式。換言之，他不使數學的成立受限於某物之存在，或仰賴某種存在性的論斷。這就是思與有的嚴格區分，也說明了牟氏的數學證成理論何以為「先驗」的。

（二）純理活動是純粹的「思」，自純理而開展的數學也是純粹的思。整個數學都可以歸諸純理所賴以運作的序次、異同等原理，這些原理既然具有普遍與必然性，則由之導出的數學命題亦可保證如此。不論算術或幾何，只要掌握了這些基本原理，接下來的其它數學命題必可合乎邏輯地推演出來。換言之，純理所賴以運作的基本原理，保證了數學命題的普遍與必然性。這主要是十七、八世紀理性主義的觀點，以理性來保證推理演繹的結果。綜觀（一）、（二），牟氏之說是一種「理性的先驗主義」。事實上，他亦屢次明言自己主張理性主義或先驗主義，並將自己的數學哲學名為「先驗主義的數學

論」。⁶¹

牟氏以純理之自己展開作為數學的基礎，純理既表現為邏輯之理，而此邏輯之理又已具足了數學所賴以開展的可能條件，所以數學在某種意義下可以歸諸邏輯。將數學歸諸邏輯，看似同於邏輯主義的立場。不過，牟氏的「邏輯主義」乃是藉由先驗純思之展開，以保證數學的普遍、獨立與必然。它全然不涉及「有」或事物存在來作為保證或依據，這就大異於羅素以類論來建構邏輯、將數學對象「落實」或還原為具體事物之聚集。牟氏之數學觀即使可以稱為「邏輯主義」，它最重要的特點還是嚴格貫徹了思與有之別。我們不妨由此切入，既對照羅素與牟氏，亦反思後者的想法。

前面概說亞里斯多德之處提到過，亞氏只接受有可感知的世界（數學所處理的事物就在其中）。完美的數學對象（幾何圖形、自然數等）確實是有的，但那是可感事物經過抽象化、理想化而得到的虛設之名。就存有論而言，數學對象是以可感事物作為它的最後來源。而羅素採取亞氏的唯名論立場，亦試圖從經驗觀點來理解數學對象。一方面，每個自然數都是一謂語，都對著一群似同之類，而普遍謂述著它們擁有多少元素。另一方面，這套有關數學對象的存有論，亦描述了自然數如何從具體事物的計量經驗中獲得了意涵。合此兩方面可知，羅素既試圖保有數學對象的抽象、普遍與獨立（雖然牟宗三認為他未能區分思與有，因此不成功），也試圖將這些抽象的、看似不可

⁶¹ 牟氏說：「對形式主義與約定主義言，吾所形成者，乃是**理性主義與先驗主義**。」（底線為筆者所加）見牟宗三，《認識心之批判》上冊，1955年〈序言〉，頁9。又言：「想把羅素與維特根什坦等人所理解之邏輯與數學予以扭轉使其落實於知性，而以**先驗主義與理性主義**解釋之。」（粗體字型為筆者所加）同上引書，1987年〈重印誌言〉，頁6。另外，「先驗主義的數學論」正是《認識心之批判》上冊第二卷第一部第二章第七節的標題。

經驗感知之物，聯繫到可感知的領域。他將數學對象的普遍意涵歸諸人的事物計量經驗，即為一例。

牟氏正確指出，羅素的存在公理會給邏輯系統帶來困難。而唯實論及羅素的唯名論都忽略了思與有的區分，也是牟氏的深刻觀察。不過，以「純理自己之展現」來對照羅素，我們不免會想：數學之為物，果然是一種純理或邏輯的展現，在任何意義上都不涉及經驗（譬如具體事物的計量經驗）嗎？說明數學真題的普遍、必然與獨立時，只以純理純思為基礎，完全排除經驗在數學真題的理解、掌握或建立之中所可能具有的任何角色，這樣的數學哲學，在認識論方面會不會有所不足？數學的思考推理固然有其純粹的一面，但數學的理解、建立與運用過程，卻常常牽涉到具體的事物與人的經驗。數學如果被設想為一種先驗而完全無雜於有的純思，我們或許便需要費些功夫，以解釋它如何與具體事物、可感世界產生交涉。從羅素的唯名論之中，可以看出他對於此交涉特別有所關注。思與有的區別，羅素在某種程度上應該不會反對。但是在思考數學的基礎時，或證立數學真題的普遍、必然與獨立時，若排除任何意義上的經驗面向，羅素恐怕會有點猶豫。

三、結語：《典範》對於牟氏思想的拓荒與轉折意義

此處無法再深究羅素與牟宗三哲學的對照。但無論如何，應該都不影響我們理解《典範》在牟氏思想發展過程中的意義。牟氏的著作之中，學者提到《典範》的機會並不多。該書於 2003 年《牟宗三先生全集》出版時重印，似乎也沒有獲得進一步的注意。學者欲認識年輕時期的牟氏，或許更常從《認識心之批判》開始。由後見之明看來，這並沒有錯。牟氏自己也認為，《典範》是一過渡性質之作，其中陳

述的義理，不如《認識心之批判》之確定與透徹。⁶² 另一方面，學者通常注意的是牟氏有取於康德哲學的一面，如此亦使《典範》更為隱微不彰。

然而我們不宜忘記，在牟氏走向康德、乃至藉用康德來詮釋宋明儒的心性之學以前，先是用力於消化羅素（以及懷德海），而後斷言其不足。正因為牟氏與羅素思想有這一段奮戰經歷，才使他敢於宣稱自己走進了康德哲學的大門，並且自信「得到了在哲學上獨立說話的思辨入路」。⁶³ 易言之，牟氏在哲學上的自信與自立，可說是脫胎於羅素的消化與批評。這一番頓挫，不能不說是牟氏思想發展的重要關節。誠如牟氏所言：「吾初極不解康德，必待對於邏輯數學之解析之扭轉，步步逼入認識主體之門，發現『超越的邏輯我』之時，才洞然相契，而歡喜無量。」⁶⁴ 很顯然，他認為自己與羅素的交會乃是一根柢，極有功於後來之吸收康德。再者，眾所周知，牟氏以拓展康德哲學而重建儒學之道德主體。然而，道德主體並不是一條現成的、理所當然的路。他必須先與西方當代哲學（以羅素為代表）交鋒對話，在看似無關乎無道德的邏輯及知性主體中披荆斬棘，窮盡其極，才終於能夠轉向道德主體。

相較於《認識心之批判》，更早的《典範》在義理上固然較不成熟、而且「火氣」較重。⁶⁵ 但是，若就牟氏「窮盡知性主體」、走進康德哲學之門這一歷程而言，我們至少可以肯定，以《典範》消化並批評羅素，確有不可或缺的拓荒意義，並且具體見證了他思想的重要轉折。

⁶² 牟宗三，《五十自述》，頁 72-73。

⁶³ 同前註。

⁶⁴ 牟宗三，《五十自述》，頁 74-75。

⁶⁵ 金岳霖對於《典範》的評語，詳本文第一節。

參考文獻

中文：

- 牟宗三 MOU Zongshan, 1989, 《五十自述》 *Wushi zishu*, 台北 [Taipei]: 鵝湖出版社 [Ehu chubanshe]。
- , 2003, 《認識心之批判》(上冊) *Renshishin zi pipan*, 收入《牟宗三先生全集》十八冊 *Mozongshan xiansheng quanji Vol.18*, 台北 [Taipei]: 聯經出版公司 [Linking publishing]。
- , 2003, 《邏輯典範》*Luoji dianfan*, 《牟宗三先生全集》十一冊 *Mozongshan xiansheng quanji Vol.11*, 台北 [Taipei]: 聯經出版公司 [Linking publishing]。
- 金岳霖 JIN Yuelin, 2002, 〈邏輯典範評審書〉 *Luoji dianfan pingshen shu*, 《清華學報》新 32 卷第 1 期 *Tsing Hua Journal of Chinese Studies*, Vol.32 no.1.
- 蔡仁厚 TSAI Renhou, 2003, 《牟宗三先生學思年譜》*Mozongshab xianshen nianpu*, 《牟宗三先生全集》三十二冊 *Mozongshan xiansheng quanji Vol.32*, 台北 [Taipei]: 聯經出版公司 [Linking publishing]。
- 顏炳罡 YAN Binggang, 1995, 《整合與重鑄 —— 當代大儒牟宗三先生思想研究》*Zhenghe yu chongzhu —— dangdai daru Mo Zhong-shan xianshen sixiang yanjiu*, 台北 [Taipei]: 臺灣學生書局 [Taiwan Studentbook]。

西文：

- Bostock, David. 2009. "Empiricism in Philosophy of Mathematics", in A.D. Irvine ed., *Handbook of the Philosophy of Mathematics*. Amsterdam; Boston: North Holland / Elsevier.
- 2009. *Philosophy of Mathematics: An Introduction*. Malden, MA: Wiley-Blackwell.
- 2012. "Aristotle's Philosophy of Mathematics", in Christopher Shields ed., *The Oxford Handbook on Aristotle*. New York: Oxford University Press.
- Chan, N.Serina. 2011. *The Thought of Mou Zongsan*. Leiden, Boston: Brill.
- Friend, Michele. 2007. *Introducing Philosophy of Mathematics*. Stocksfield: Acumen.
- Horsten, Leon. Spring 2015 Edition. "Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), available from: <http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/philosophy-mathematics/>. 查閱日期：2015 年 3 月 1 日。
- Ongley, John and Carey, Rosalind. 2013. *Russell*. New York: Bloomsbury Academic.
- Slater, John G. 1994. *Bertrand Russell*. Bristol: Thoemmes Press.

Mou Zongsan's Criticism of Russell's Logicism

LIU Ying-Cheng

Doctoral student of Department of Chinese Literature,

National Tsing Hua University

Address: No.101, Sec. 2, Guangfu Rd., East Dist., Hsinchu City 30013,
Taiwan

E-mail: dokkyrote2003@hotmail.com

Abstract

The present essay examines Mou Zongsan's criticism in his *Luoji dianfan* of Russell's logicism. First, the author gives a sketch of how Russell reduces mathematics to logic on the base of the set theory and why he has to assume the axiom of infinity and the multiplicative axiom. Second, Russell's position is traced to nominalism, one of the two main traditions in the philosophy of mathematics. Finally, I present Mou's doctrine that logic (and mathematics) is the displaying of pure reason itself and give my reflection on the doctrine. I conclude that in spite of Mou's disagreement with Russell, *Luoji dianfan* did play an indispensable role in the development of his thought.

**Keywords: Mou Zongsan, Russell, mathematics, rationalism,
Paradigm of Logic (Luoji dianfan)**